6. STRATEGIE DI CALCOLO E SIGNIFICATI DELLA SOTTRAZIONE E DELLA DIVISIONE TRA 7 E 9 ANNI

Enrica Ferrero,Circolo Didattico di Piossasco (TO). Pubblicato su "L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate", 1991

6.1.Introduzione

Il problema dell'apprendimento delle tecniche di calcolo scritto delle operazioni (in particolare per la divisione) è stato più volte considerato nella ricerca didattica per il suo interesse cognitivo e didattico (tra i lavori più significativi degli ultimi anni, *vedi (11),(12))*
Con la diffusione delle calcolatrici si è ridotta l'importanza sociale dell'obiettivo di apprendere delle tecniche di calcolo scritto da eseguire meccanicamente;in relazione alle esigenze formative poste dalla crescente informatizzazione di molte attività umane appare invece più significativo l'approccio consapevole alle tecniche di calcolo scritto come algoritmi di cui valutare e confrontare l'universalità e l'economicità.In tale senso erano già orientati i programmi francesi del 1980 *(cfr.(11))*, nei quali in particolare si raccomandava agli insegnanti :"Ci si limiterà a metodi empirici di calcolo del quoziente e del resto alla cui elaborazione i bambini parteciperanno". Per quanto riguarda i nuovi programmi italiani per la scuola elementare, essi rivalutano le tecniche di calcolo scritto delle operazioni aritmetiche come occasioni di formazione algoritmica e prevedono che gli allievi debbano non solo imparare a calcolare in forma scritta, ma anche "comprendere il significato dei procedimenti di calcolo"

Come verrà chiarito in questo articolo, appare inoltre rilevante l'effetto che lo sviluppo e il confronto delle strategie di calcolo scritto possono avere per quanto riguarda una più profonda e completa padronanza dei significati delle operazioni aritmetiche.

Ad avviso del gruppo di ricerca didattica a cui appartengo *(vedi (4))*,tutto ciò giustifica lo sviluppo di ricerche in un'ottica curriculare,mirata alla produzione di proposte didattiche che rendano praticabile l'obiettivo di un approccio ragionato alle tecniche di calcolo scritto delle operazioni aritmetiche (in particolare per la divisione,vista la notevole complessità della relativa tecnica).

Questo articolo ha lo scopo di esporre in forma necessariamente sintetica alcune considerazioni suggerite dalla sperimentazione nella mia classe (in II ed in III elementare) di un approccio ragionato alle tecniche di calcolo scritto delle operazioni aritmetiche; all'interno del gruppo cui appartengo,questa esperienza ha contribuito (accanto ad esperienze svolte negli anni precedenti) a identificare difficoltà e potenzialità di tale "approccio ragionato" e a fissare alcuni punti di riferimento in base ai quali sviluppare itinerari didattici analoghi nelle altre classi che sperimentano il progetto genovese per la scuola elementare *(cfr.(4))* .
L'esposizione tiene conto prevalentemente dei fenomeni osservati nella mia classe,però sono ormai numerosi i riscontri delle cose dette in questo articolo nella pratica didattica di altre classi che parallelamente alla mia, o negli anni successivi, hanno collaudato un itinerario di lavoro sostanzialmente simile a quello di seguito descritto *(cfr.(5))*.
La classe in cui ho lavorato (che quest'anno ha concluso il ciclo elementare) era di 18 alunni, di estrazione socioculturale molto varia, con grossi problemi di inserimento e di apprendimento per cinque bambini.
Dalle verifiche effettuate nel corso della classe V è risultato che in situazioni standard tutti i bambini della classe erano in grado di effettuare autonomamente la scelta delle operazioni necessarie per risolvere un problema ad una operazione, tranne uno (in grosse difficoltà per quanto riguarda in particolare i significati della divisione); e tutti i bambini meno uno sono pervenuti ad una sufficiente padronanza delle tecniche di calcolo scritto delle operazioni aritmetiche (compresa quella della divisione). Si tratta di risultati normali nel Circolo Didattico cui appartengo,che "adotta" il progetto genovese come ipotesi di programmazione: dalle verifiche effettuate nel gennaio 1989 nelle classi V,risulta che gli obiettivi prima descritti sono stati conseguiti da oltre il 96% dei 192 bambini delle classi V del Circolo.

La nostra pratica didattica prevede che, prima dell'introduzione delle tecniche di calcolo scritto delle operazioni, i bambini per lungo tempo si "affatichino" nella individuazione di loro personali strategie di calcolo (desumibili, più o meno consapevolmente, da strategie di ragionamento, o comunque rapportabili ad esse). Le ragioni di questa scelta possono essere raggruppate come motivazioni "in positivo"(che tengono conto degli effetti positivi che la scelta può avere sul processo di apprendimento) e come motivazioni "in negativo" (che tengono conto dei rischi e delle difficoltà che la scelta evita).

A) In positivo: "arrabattandosi" per l'individuazione di una strategia di calcolo,il bambino mette in atto processi di ragionamento che gli consentono di penetrare i significati delle operazioni aritmetiche, meno accessibili per il senso comune; inoltre, attraverso la produzione di una strategia di calcolo,ispirata più o meno consapevolmente dalle specificità della strategia di ragionamento,perviene alla scoperta di alcune delle "proprietà implicite "delle operazioni aritmetiche ("teoremi in atto" di Vergnaud *(13))*; infine,attraverso l'esercizio di strategie spontanee di calcolo, approda consapevolmente alle procedure aritmetiche che costituiscono la base delle tecniche di calcolo scritto delle operazioni.
B) In negativo: la precoce introduzione della tecnica di calcolo scritto(in un momento cioè in cui i significati delle operazioni non sono ancora completamente posseduti dal bambino) provoca soprattutto nei bambini più "deboli" una paralisi nell'attività di ragionamento.Il bambino rinuncia a gestire e controllare la situazione problematica ed affannosamente si getta nella ricerca delle operazioni da eseguire con il rischio di cadere in una combinazione numerica casuale.
Nel corso di questo articolo cercherò di argomentare quanto affermato al punto A), esponendo con maggior dettaglio le motivazioni ivi sintetizzate; per il punto B) rinvio invece all'articolo di Boero *(1)*.

6.2.Il lavorio sulle strategie di calcolo per risolvere problemi ad una operazione prima dell'introduzione delle tecniche di calcolo scritto contribuisce a costruire i significati delle operazioni aritmetiche.

Lavorando su tre filoni (tecnologico, economico, collocazione spazio-temporale) tra quelli in cui è articolata la nostra proposta didattica,i bambini sin dalla prima elementare affrontano problemi di addizione,moltiplicazione e sottrazione (differenza, completamento, resto); nel corso della classe seconda,mentre rafforzano il concetto di sottrazione, si cimentano anche nei primi problemi di divisione che verranno poi affrontati sistematicamente nella classe III (ripartizione-contenenza).
Durante l'intera esperienza dei primi tre anni della scuola elementare riscontriamo alcuni comportamenti comuni alla maggior parte dei bambini:

I) in seguito a ripetute proposte di situazioni problematiche di sottrazione del tipo "quanto resta" e di divisione come ripartizione-frazionamento il bambino,che dispone e manipola gli oggetti di cui parla il problema (monete; dolci; calendario; righello nelle misurazioni;....) riesce generalmente a verbalizzare il ragionamento che intende adottare o sta adottando ("tolgo"; "divido"); riesce inoltre ad accompagnare le dichiarazioni di ragionamento con adeguate operazioni materiali(l'operazione di "togliere" da una quantità "maggiore" una quantità "minore" con la consapevolezza che ciò che rimane è "di meno" di quanto si possedeva inizialmente; l'operazione fisica di intaccare e smantellare la quantità iniziale per ricostituirla,frazionata,in parti di eguale "valore"). Abbastanza precocemente (durante la classe I, per l'addizione; verso la fine della II, per la sottrazione e la moltiplicazione ; all'inizio della III, per la divisione) il bambino, supportato dall'insegnante,riesce anche a registrare con la notazione algebrica standard la strategia di ragionamento adottata (intendiamo per "registrazione con la notazione algebrica" la stenografia, per quanto è possibile,del ragionamento del bambino con i segni usuali delle operazioni e con l'uguale); infine, potendo manipolare gli oggetti di cui tratta il problema,riesce a pervenire al risultato dell'operazione.
In una fase successiva, quando il bambino non fa più ricorso nè alla manipolazione, nè alla rappresentazione grafica (che registra generalmente una avvenuta, o facilmente immaginabile, attività manipolativa) sorgono le difficoltà di calcolo aritmetico:
- <u>circa la sottrazione</u>,dovendo calcolare ad esempio 900-400=....., il bambino dovrebbe fare ricorso al calcolo mentale che non è facile acquisire e padroneggiare. Egli risolverà quindi il problema avvalendosi delle dita, su cui potrà applicare l'operazione fisica di "togliere"; oppure, raramente, opererà per conta regressiva ,strategia che tendenzialmente viene scelta dai bambini in quanto corrisponde alla semantica del "togliere" ma che risulta di difficile gestione pratica; oppure,più frequentemente, procederà per completamento: 400+.....=900; farà cioè uso di una abilità che gli deriva, per trasferimento inconsapevole,dal lavoro di scomposizione e successiva composizione additiva con i prezzi (900=400+500, che favorisce l'affiorare di 400+...=900); tale lavoro viene attivato ed esercitato nella risoluzione di problemi di "completamento" affrontati prima e/o contemporanenamente a quelli di "quanto resta";
- <u>circa la divisione</u>: l'operazione di divisione meno ancora dell'operazione di sottrazione suggerisce al bambino modalità operative numeriche efficienti.Come meglio si vedrà successivamente nel corso dell'esposizione, il bambino, dovendo affrontare all'interno di una

situazione problematica da lui semanticamente padroneggiata una operazione di divisione, mette in atto generalmente una strategia di calcolo che procede per tentativi; esempio:

dovendo calcolare 1000:4 il bambino dice:
"provo per 300, lo ripeto 4 volte, fa 1200 , è troppo...provo per 200,...."
......"provo per 250,...va bene" .

Tenuto conto delle considerazioni precedenti, nonostante le difficoltà segnalate di operare a livello numerico, ci pare possibile concludere che le operazioni SOTTRAZIONE e DIVISIONE (ed i loro relativi segni), per la corrispondenza tra la semantica loro abitualmente attribuita e le operazioni materiali che esse suggeriscono e che il bambino compie (praticamente o a livello di pensiero) per risolvere le situazioni problematiche ad esse inerenti, vengono ad assumere per il bambino inizialmente il significato (rispettivamente) di TOGLIERE e di RIPARTIRE-FRAZIONARE. Ciò accade naturalmente in relazione ai problemi che vengono proposti dall'insegnante e che richiamano in modo molto diretto e immediato tali significati.

II) affrontando (nel primo ciclo) situazioni problematiche di SOTTRAZIONE come COMPLETAMENTO e di DIVISIONE come CONTENENZA generalmente i bambini non le riconoscono come "problemi di sottrazione " e come "problemi di divisione" (sono problemi del tipo: *quanto in più rispetto a..., quanto in meno rispetto a..., quanto manca per..., ricerca del resto monetario come parte di somma pagata e quindi riavuta; ricerca dell'aumento di valore....; quante cose che costano...posso comperare con...; quanti fogli larghi...occorrono per coprire una parete lunga....;* ecc.)
Tali situazioni sono generalmente difficili da gestire da parte dei bambini: la manipolazione non è sempre possibile o immediatamente intuibile nelle sue modalità; occorre spesso l'intervento mediatore dell'insegnante e/o una prima alfabetizzazione numerica.
Ad esempio, dovendo risolvere il problema:

"Ho solo 1400 lire e voglio comprare una penna da 2000 lire;quanto mi manca ?"
il bambino, che risolve attraverso la manipolazione e che già dispone delle 1400 lire, deve capire che ciò di cui dispone, e manipola, non gli basta per risolvere il problema; deve agire; deve procurarsi altri soldi (in tutto questo processo di pensiero e successive azioni, almeno all'inizio, il bambino soprattutto se "debole" necessita dell'aiuto dell'insegnante).
Procuratosi il denaro il bambino in genere, contando per 100, aggiunge le monete alle 1400 lire fin quando non arriva alla cifra desiderata; quindi conta quanto ha aggiunto.
Quando non dispone delle monete, simulando di possederle, conta per 100 da 1400 a 2000; a questo punto, però, necessita di una prima alfabetizzazione numerica che nel nostro curriculum sembra (come già accennato in precedenza) essere facilitata dal lavoro di scomposizione e successiva composizione additiva (es. 2000=1400+600, favorisce 1400+....=2000) .

$$1400\,\underline{\hspace{3cm}}\,2000 \qquad 1400+\overset{600}{\ldots\ldots\ldots}=2000$$

Alla stessa stregua dovendo risolvere un problema di divisione del tipo:

"Quante brioches da 300 lire posso comprare con un biglietto da 1000 lire? "

il bambino capisce che con il solo biglietto da 1000 lire non può risolvere il problema: deve agire; deve convertire, per comodità, le 1000 lire in monete da 100, quindi contarle separatamente; alcuni bambini (la maggioranza) procedono così:

"prendo 300, ed è già una brioche; poi ancora 300....", ecc.

altri scrivono:

"tolgo 300 per una brioche, e mi restano 700; tolgo ancora altre 300...poi ancora 300...."

Anche in questo caso non potendo disporre,o fare uso,delle monete il bambino deve possedere una prima alfabetizzazione numerica che gli consenta il calcolo aritmetico di addizioni ripetute o sottrazioni ripetute:

300+300+....

1000-300=700

700-300=400
....

$$300 \xrightarrow{+300} 600 \xrightarrow{+300} 900 \xrightarrow{+100} 1000$$

1 b. 2 b. 3 b. mi restano 100 lire

$$1000 \underset{\text{1 b.}}{\xrightarrow{-300}} 700 \underset{\text{1 b.}}{\xrightarrow{-300}} 400 \underset{\text{1 b.}}{\xrightarrow{-300}} 100$$ (che mi restano)

....

Le considerazioni sino ad ora espresse nella trattazione del punto II ci inducono a concludere che la specificità delle situazioni problematiche sopra considerate induce nel bambino particolari strategie di ragionamento che non possono (per la particolarità e fissità -esaminate precedentemente- del significato inizialmente attribuito ai termini SOTTRARRE e DIVIDERE) venir riconosciute come ragionamenti di SOTTRAZIONE e DIVISIONE, quindi tanto meno venir stenografate con i segni - e : .
Le stenografie adottate sono generalmente le seguenti:

1400+$\overset{600}{\text{..............}}$=2000 (brioches) 300+300=......+300=.........

$$1400 \xrightarrow{+600} 2000 \qquad 300 \xrightarrow{+300} 600 \xrightarrow{+300} 900 \xrightarrow{+300} 1000$$

$$1400 \xrightarrow{+100} 1500 \xrightarrow{+100} 1600 \qquad 1000 \xrightarrow{-300} 700 \xrightarrow{-300} 400 \xrightarrow{-300} 100$$

Come evolverà la situazione? Come perverrà il bambino a riconoscere nelle operazioni di SOTTRAZIONE e DIVISIONE i modelli matematici adeguati anche alle situazioni problematiche sopra illustrate?

PER QUANTO RIGUARDA LA SOTTRAZIONE:

durante l'evolversi del lavoro scolastico il bambino, familiarizzato sin dall'inizio nel calcolo orale, come abbiamo visto, ragiona spesso per completamento anche in situazioni problematiche di resto; ad esempio, pur avendo dichiarato di dover togliere 400 da 900, conta da 400 a 900 e stenografa :

$$400 \xrightarrow{+500} 900$$

Accanto a questa stenografia di calcolo il maestro gli fa riportare anche la stenografia del ragionamento: 900-400=500.
Dalla dialettica tra il calcolo mentale (con l'esplicitazione e il confronto delle diverse strategie seguite in classe), e la risoluzione scritta di problemi di "quanto resta" e di completamento, con l'esplicitazione-stenografia delle strategie di ragionamento e calcolo, e con il successivo confronto tra le diverse strategie utilizzate nella classe, scaturiscono nei bambini alcune acquisizioni:
- il completamento è, in molti casi, una modalità di calcolo "economica" per calcolare sottrazioni
- d'altro canto "completare" significa "non contare più", cioè "togliere" la parte nota di un tutto, quindi cercare, cioè"contare", solo l'incognita presente come componente nel tutto.
Forte di queste acquisizioni, spesso presenti al semplice livello di intuizione, il bambino riuscità a fronteggiare e risolvere un conflitto cognitivo che gli si presenterà in seguito: dovendo stabilire quanto ancora, ad esempio, gli occorre per arrivare a 12350 lire quando dispone di sole 9780 lire, egli, pur dichiarando di dover contare da 9780 a 12350, memore delle acquisizioni sopra citate, deciderà di aggirare l'ostacolo delle difficoltà di calcolo mentale e ricorrerà all'operazione di sottrazione eseguendola con la tecnica di calcolo scritto che nel frattempo ha gradualmente acquisito.

A questo punto (fine della classe II) il processo di apprendimento del significato di SOTTRAZIONE sarà giunto pressochè a compimento:
- risolvendo contemporaneamente problemi di "quanto resta" e di completamento e familiarizzandosi con il calcolo mentale, il bambino avrà riconosciuto nella operazione di sottrazione, oltre al significato di "togliere", anche il significato di "completare", in quanto, per le ragioni sopra espresse, riconducibile al "togliere"
- avrà cioè ricondotto un significato della sottrazione "marginale" (in quanto apparentemente estraneo alla semantica del "togliere" secondo il

senso comune) al significato "centrale" (perchè aderente alla semantica del "togliere" secondo il senso comune), dopo però aver interpretato il nuovo significato "completare" come accezione particolare e ristretta del significato più ampio "togliere";

- avrà quindi confermato la nozione di SOTTRAZIONE come TOGLIERE; ma, avendo d'altra parte esplorato la variegata accezione del "togliere", avrà potuto intuire la "parentela" tra l'operazione di SOTTRAZIONE e quella di ADDIZIONE; avrà cioè raggiunto, seppur inconsapevolmente, il significato della SOTTRAZIONE come OPERAZIONE INVERSA dell'ADDIZIONE, che è la semantica della sottrazione riconosciutale dalle sistemazioni matematiche correnti. Proprio l'accesso alla struttura matematica della sottrazione consentirà poi al bambino un REINVESTIMENTO delle sue conoscenze al fine di una modalità per lui più economica di risoluzione.

PER QUANTO RIGUARDA LA DIVISIONE:
risolvendo problemi di ripartizione-frazionamento, e ragionando sui problemi di contenenza secondo le modalità espresse nel precedente esempio delle brioches, a poco a poco il bambino (nel corso della classe III):

- riconoscerà la relazione di affinità tra l'operazione di ripetere (attraverso l'addizione o la sottrazione) un numero inizialmente sconosciuto di volte un valore conosciuto (fino a raggiungere il valore desiderato) con il procedere per tentativi impiegato nei problemi di ripartizione:

(brioches)

$$300 \xrightarrow{+300} 600 \xrightarrow{+300} 900$$

affine a:

1000:4=

provo per 250:

$$300\text{x}\overset{3}{.....}=900$$

$$\overset{250}{.............}\text{ x } 4 = 1000$$

- attribuirà, per l'affinità di strategia di calcolo riscontrata,alla operazione DIVISIONE, oltre al significato RIPARTIRE-FRAZIONARE, anche il significato CONTENERE; arricchirà quindi l'operazione di divisione di un nuovo significato:al significato RIPARTIRE-FRAZIONARE, "centrale" (perchè adeguato alla semantica del "dividere" secondo il senso comune) affiancherà il significato "marginale" di "CONTENERE" ("marginale" perchè estraneo alla semantica del "dividere" secondo il senso comune)

- anche in questo caso, durante l'intero svolgimento del processo di apprendimento, il bambino avrà potuto raggiungere il significato della DIVISIONE come OPERAZIONE INVERSA della MOLTIPLICAZIONE che è una delle due semantiche della divisione riconosciutele dalla sistemazione matematica. Proprio l'accesso alla struttura matematica della divisione consentirà al bambino (come vedremo al punto 6.5) un reinvestimento delle sue conoscenze al fine di pervenire ad una modalità per lui più economica di risoluzione; va tenuto inoltre presente che nella strategia di calcolo relativa alla tecnica a cui si vuol pervenire (vedi punti 6.5 e 6.6) sono presenti sia il "provo per" che lo "svuoto progressivamente".

6.3.LA STRATEGIA DI RAGIONAMENTO GUIDA LA STRATEGIA DI CALCOLO E LA ALIMENTA DI PROPRIETÀ IMPLICITE.

Prendiamo in considerazione alcuni esempi relativi a varie operazioni:

ADDIZIONE:

-dovendo sommare 200 e 400 il bambino, che perviene entro il II quadrimestre della classe I alla notazione algebrica contemporaneamente o dopo un'approfondita attività di manipolazione(in particolare con le monete), non esita ad invertire i valori, risolve quindi il problema,seppur inconsapevolmente,applicando la PROPRIETA' COMMUTATIVA

- dovendo sommare (all'inizio della II) valori del tipo 310,240,430 il bambino, memore dell'attività di manipolazione (con le monete), procede generalmente così:

"conto prima i 100 ed arrivo già a 900,poi conto le monete da 10 e fa 80;poi le 80 le aggiungo a 900 e scopro che fa 980"; in pratica,il ragionamento può essere stenografato così:

310+240+430=300+10+200+40+400+30=(300+200+400)+(10+40 +30)= =900+80=980

(vengono applicate la proprietà ASSOCIATIVA e la proprietà COMMUTATIVA)

- in modo analogo si comporta un altro bambino (all'inizio della II) quando deve sommare 500 e 800 e procede così:

"Conto già 500 più 500 e fa 1000;poi aggiungo ancora le 300 che non ho contato prima "

stenografando si otterrebbe :
500+800=(500+500)+300=1000+300=1300

MOLTIPLICAZIONE:

Dovendo ad esempio eseguire il calcolo di 6x12 in un problema di "quanti fogli in tutto, se ogni bambino deve avere 6 fogli e i bambini sono 12", alcuni bambini di III che hanno già imparato ad eseguire moltiplicazioni per un numero ad una cifra applicano la proprietà COMMUTATIVA per ricondursi ad una situazione più facilmente gestibile (6x12=12x6) , altri procedono così : 6x12 = 6x10+6x2, applicano quindi (implicitamente) la proprietà DISTRIBUTIVA. L'applicazione di tale proprietà è più evidente negli esempi successivi (qui e nel seguito si riportano solo le stenografie):
310x5= 300x5 +10x5 ; 364x4=300x4+60x4+4x4

DIVISIONE:

anche nei problemi di divisione (in particolare,quando si tratta di ripartire somme di denaro, spazi, ecc.) viene utilizzata implicitamente (nelle strategie di calcolo dei bambini) la proprietà distributiva: in III,
1680 : 4 = 1600 :4 +80 :4

6.4.LAVORANDO SULLE STRATEGIE SPONTANEE DI CALCOLO I BAMBINI PERVENGONO ALLA COSTRUZIONE CONSAPEVOLE DELLE PROCEDURE DI CALCOLO RELATIVE A PARTICOLARI TECNICHE DI CALCOLO SCRITTO DELLE OPERAZIONI.

Circa l'ADDIZIONE, riprendendo l'esempio esaminato precedentemente (310+240+430), si può notare come il bambino utilizza spontaneamente gli stessi "meccanismi" del calcolo in colonna;l'insegnante può facilmente partire da questa strategia di calcolo prodotta in classe per fare osservare che si tratta di una strategia economica e valida in generale....
Circa la SOTTRAZIONE, dovendo calcolare 2000-1370 abbiamo visto che spesso il bambino risolve il problema completando da 1370 a 2000:

$$1370 \overset{?}{\_\_\_\_\_\_\_} 2000$$

$$1370 \xrightarrow{+30} 1400 \xrightarrow{+600} 2000$$

630

quindi "completa"secondo l'ordine di grandezza inferiore prima di passare a quello superiore; così facendo si accosta concettualmente ad un aspetto importante della tecnica di sottrazione in colonna (con prestito).
Circa la MOLTIPLICAZIONE: riprendendo l'esempio esaminato precedentemente (310x5), il bambino risolve il problema investendo le proprietà implicite attivate dalla specificità della situazione problematica (valori monetari scomponibili); in tal modo si accosta concettualmente alla tecnica della moltiplicazione in colonna (cioè anticipa spontaneamente tutti i passaggi della tecnica)
Circa la DIVISIONE: le strategie spontaneamente espresse dai bambini ed opportunamente guidate dall'insegnante conducono alla tecnica della divisione "alla canadese" (o "alla siciliana",o "Nuffield" - vedi *(5),(11),(12)).*
Nell'ultima parte di questo articolo mi soffermerò proprio su questo punto, mettendo in evidenza gli aspetti essenziali del lavoro in classe e il ruolo dell'insegnante (per una trattazione più estesa e dettagliata, *vedi(5)).*

6.5. LA TECNICA DELLA DIVISIONE "ALLA CANADESE" O "NUFFIELD" COSTITUISCE LO SBOCCO PROCEDURALE DELLE STRATEGIE SPONTANEE DI CALCOLO UTILIZZATE DAI BAMBINI.

Verso la fine della classe II e all'inizio della classe III vengono proposti ai bambini vari problemi di divisione.L'insegnante ha chiari gli obiettivi finali:
- fare pervenire la classe all'acquisizione dei significati fondamentali della divisione
- condurre i bambini all'acquisizione di una tecnica di calcolo scritto della divisione,assunta però e compresa come sbocco procedurale delle strategie in un primo tempo spontaneamente prodotte dai bambini.

Sin dall'inizio (fine II-inizio III) dagli elaborati dei bambini emergono due strategie di ragionamento operativo, all'interno della seconda delle quali si evidenziano più strategie di calcolo:
- la prima strategia di ragionamento operativo corrisponde alla pratica extrascolastica del ripartire un "mucchio " di oggetti distribuendoli equamente (uno a me,uno a te,....); abbiamo verificato che questa strategia si manifesta anche in classi in cui l'insegnante non l'ha mai proposta, e riaffiora anche in seguito in situazioni particolari in cui vengono evocate "distribuzioni eque" familiari fuori della scuola.Si tratta di una strategia che (soprattutto se insegnata a scuola) comporta il rischio di venire adottata dai bambini più deboli come unica strategia presa in considerazione, e quindi di "bloccarli"; tuttavia per altri bambini essa sembra costituire una prima tappa verso strategie più evolute (del tipo "provo per...");
- la seconda strategia di ragionamento operativo consiste nel "provo per": essa si manifesta inizialmente soprattutto in problemi di ripartizione (in particolare, di ripartizione di una spesa) nel modo ora esemplificato (inizio III) :

"Dobbiamo pagare 27000 lire, siamo in 18 ; se ognuno porta 1000 lire, fa in tutto 18000 lire , che è poco; allora provo con 2000 lire: fa 36000 lire, che è troppo......"

Successivamente essa si trasferisce anche a problemi di contenenza:

"Dobbiamo costruire la striscia del tempo con dei fogli larghi 21 cm; la parete è lunga 480 cm, allora provo con 10 fogli, vengono 210 cm; provo con 20 fogli, vengono 420 cm ;....."

Nel corso della classe III, agendo su valori numerici sempre più impegnativi ed esigendo dai bambini risultati sempre più precisi, si diversificano e si "specializzano" gradualmente le strategie di calcolo messe in opera con il "provo per..."; si possono così riconoscere almeno tre tipi di strategie di calcolo generate dal "provo per ...":

- prove distinte successive senza un criterio prestabilito(il bambino cerca di approssimare il dividendo per tentativi, scegliendo via via successivi quozienti finchè non arriva ad una approssimazione soddisfacente)

"Devo trovare quanto devono pagare a testa i 52 bambini delle terze per il pullman, che costa 120000 lire. Se pagano 1000 lire a testa fa 52000 lire, troppo poco. Se pagano 2500 lire fa 52000 lire e 52000 lire e altre 26000 lire, cioè 130000 lire, che è troppo. Provo con 2200 lire.... (ecc)"

- svuotamento progressivo del dividendo attraverso successivi resti che vengono a loro volta divisi per il divisore:
(marzo della classe III; si tratta di ripartire una spesa di 32000 lire tra i 18 bambini della classe)

" 18 per 1000 a testa fa 18000; resta da dividere 14000; 18 per 100 fa 1800, troppo poco; provo con 18 per 500 a testa, fa 9000; resta da dividere 5000; 18 per 100 fa 1800, 18 per 200 fa 3600, resta ancora da dividere 1400.....(ecc)"

- avvicinamento al dividendo mediante approssimazioni successive del quoziente, che ogni volta viene moltiplicato per il divisore in modo da orientare le approssimazioni successive:
nello stesso problema considerato sopra (32000 lire di spesa da ripartire tra 18 bambini),un altro bambino procede così:

"Provo per 1000, fa 18000, allora provo per 11OO, fa 19800, allora provo per 1200, fa 21600..... (ecc.) provo per 1800 e vedo che fa 32400 , allora torno indietro a 1700 a testa, che fa 30600, e poi provo 1710,......(ecc)"

Il seguente schema sintetizza quanto ora esposto:

distribuzione (manipo= lando o mediante il disegno)

provo per ... ripetendo

più strategie di calcolo

prove diverse e distinte, senza ordine prestabilito

prove iniziali, ... ricerca del resto, nuove prove sul resto...(progressivo svuo= tamento del dividendo) (questa strategia corrispon= de semanticamente alla tecnica "alla canadese")

prova iniziale, ripetizione della prova con lo stesso ordine di grandezza fino al risultato migliore, poi nuove prove con ordini di grandezza minori (progressivo avvicinamento al dividendo)

6.6. IL RUOLO DELL'INSEGNANTE NELL'APPROCCIO ALLA TECNICA DI CALCOLO SCRITTO DELLA DIVISIONE

In relazione alla varietà delle strategie prodotte dai bambini si delinea il problema del ruolo dell'insegnante.
L'insegnante che ha chiari gli obiettivi della sua attività,tenendo conto dei livelli presenti in classe, deve convogliare progressivamente (nel corso della classe III) l'intera classe all'utilizzo della strategia di calcolo di progressivo svuotamento del dividendo (in quanto semanticamente corrispondente alla tecnica di calcolo scritto della divisione "alla canadese", e in quanto unica strategia "universale" ed "economica" tra quelle normalmente prodotte in classe).
E' legittima questa scelta didattica ?
Noi riteniamo che lo sia data la varietà delle situazioni che viene a prodursi in classe nel corso dell'intera esperienza;abbiamo infatti potuto constatare che:
* almeno inizialmente la strategia di calcolo scelta dai bambini non sembra dipendere strettamente dal loro livello di apprendimento, ma piuttosto dai vincoli insiti nella situazione problematica, dalla eventuale precedente esperienza di" manipolazione "delle grandezze in gioco, dai particolari valori numerici presenti nella situazione problematica *(vedi (3), (5))*
** il bambino non segue una precisa linea evolutiva nella scelta delle strategie di calcolo: la sensibilità al contesto *(vedi (10))* sembra molto più rilevante di eventuali tappe di maturazione nelle sue strategie di calcolo
*** generalmente, almeno all'inizio, la maggior parte dei bambini adotta la strategia per "prove diverse e distinte", tuttavia:
- essa viene gradualmente abbandonata specie nelle situazioni in cui è richiesta una approssimazione accurata, che comporta più di una cifra non nulla nel quoziente da cercare; ciò è particolarmente evidente nei bambini di basso livello di apprendimento i quali, nonostante l'aiuto dell'insegnante, resistono a mutare l'ordine di grandezza del numero da sottoporre a "prova" e preferiscono la strategia di ricerca del resto,nuova divisione, quindi nuove prove ("svuotamento progressivo del dividendo")
- essa persiste tendenzialmente tra i bambini di basso livello di apprendimento quando per il risultato ci si accontenta di un'unica cifra non nulla, oppure tra i bambini molto bravi nel calcolo orale, che tuttavia in genere padroneggiano anche altre strategie.

A proposito sempre della strategia di calcolo "per prove ripetute e distinte", è opportuno osservare che si tratta di una strategia che gradualmente aumenta la sensibilità dei bambini al fatto che se il "provo per" dà un risultato superiore al dividendo, occorre diminuire il quoziente, e se il "provo per" dà un risultato inferiore al dividendo,occorre aumentare il quoziente; e tali aumenti o diminuzioni devono essere tanto maggiori quanto più i risultati del "provo per " sono lontani dal dividendo.
Anche se destinata ad essere abbandonata a favore di strategie meno"disordinate", essa è quindi utile per gli stimoli che dà ad una migliore padronanza della divisione.

Quanto alla preferenza accordata nel nostro gruppo allo sbocco delle strategie dei bambini nella tecnica di calcolo scritto "alla canadese", mi sembra utile richiamare l'attenzione sui seguenti aspetti di essa:
- anche con riferimento alle ricerche fatte all'estero, essa appare l'unica tecnica che consenta un approccio ragionato e generale a partire dalle strategie di calcolo prodotte dai bambini (la tecnica usuale consente un approccio ragionato,peraltro non immediato, solo nel caso di divisori ad una cifra) (*cfr.(9),(11),(12),(14)*)

- l'esperienza nelle nostre classi conferma l'analisi dei vantaggi della tecnica "alla canadese" fatta in *(11)*: più facile individuazione degli errori; migliore controllo delle situazioni in cui si presentano zeri intercalati; possibilità di utilizzare anche prove intermedie che non hanno condotto alla determinazione del miglior quoziente parziale; sollecitazione al controllo degli ordini di grandezza e al calcolo mentale con numeri multipli di 10,100,1000.....Abbiamo inoltre individuato vantaggi ulteriori: il significato del "resto" (che si perde con la tecnica usuale) viene ben evidenziato nella tecnica "alla canadese";per di più questa tecnica di calcolo ripercorre un ragionamento collegato ai significati della divisione, e ciò favorisce il controllo del risultato in relazione alla situazione problematica proposta.

Si riporta l'esempio numerico citato in *(11)* , con il "formato" adottato nel nostro progetto:

	5725	42	
	- 4200	42 x 100	
	1525		
	- 840	42 x 20	(si noti che la stima errata non produce conseguenze irreparabili sul procedimento)
	685		
	- 420	42 x 10	
	265		
	- 252	42 x 6	
(resto)	13	136	(quoziente)

Definito il ruolo dell'insegnante e valutata la legittimità dei suoi interventi è opportuno esaminare ora i compiti nei quali si estrinseca ed articola operativamente il suddetto ruolo. E' opportuno anzitutto richiamare il fatto che la scelta della strategia di calcolo da parte del bambino dipende da molte variabili, di cui l'insegnante deve tener conto nella scelta delle situazioni problematiche e delle attività da proporre in classe :capacità di calcolo orale; familiarità e consapevolezza dei possibili ordini di grandezza, quindi capacità di ragionare su ordini di grandezza diversi; specificità della situazione problematica (natura delle grandezze in gioco,valori numerici particolari, vincoli riguardanti i risultati da ottenere-ad esempio,grado di approssimazione richiesto, ecc.); elementi di affinità o novità rispetto all'esperienza del bambino; particolare percezione e rappresentazione che ogni bambino ha del contratto didattico *(vedi (6))*; conoscenza, quindi familiarità, che i bambini hanno rispetto alla gamma di strategie di calcolo impiegate e/o impiegabili in situazioni problematiche analoghe a quella considerata.
Passando ora a trattare più in dettaglio dei compiti dell'insegnante, occorre distinguere i compiti rispetto al singolo bambino, da quelli che l'insegnante ha rispetto all'intera classe.

<u>Rispetto al singolo bambino</u> l'insegnante si pone come MEDIATORE delle strategie risolutive individuali per tutte le fasi del processo risolutivo (intuizione del ragionamento possibile, individuazione della strategia di ragionamento, individuazione della strategia di calcolo, esplicitazione linguistica della strategia di ragionamento e calcolo, controllo delle strategie adottate):
- sollecita strategie; ne indirizza l'esplicitazione verbale; guida ed aiuta la trascrizione linguistica (verbale, grafo, notazione algebrica)
- fa assumere al bambino consapevolezza della modalità operativa adottata
- indirizza il bambino a ricercare modalità spaziali, simboliche, numeriche per organizzare adeguatamente lo sviluppo della strategia di calcolo

<u>Rispetto all'intera classe</u> l'insegnante si pone come COORDINATORE del complessivo processo di apprendimento:
- esercita i bambini nel calcolo orale (addizione, sottrazione, moltiplicazione)
- propone svariate situazioni problematiche (diverse per natura delle grandezze in gioco, complessità, familiarità rispetto all'esperienza dei bambini)
- coordina la comunicazione e la socializzazione delle diverse strategie di calcolo adottate dai bambini nel calcolo orale e nella risoluzione scritta dei problemi
- evidenzia i rischi e le difficoltà che ogni strategia di calcolo può presentare

- guida alla scelta della strategia di calcolo più "economica" (meno laboriosa, più comunicativa, più lineare, che mette cioè al riparo da confusioni ed errori)
- seleziona le strategie di calcolo adottate dai bambini
- indirizza l'attenzione dei bambini alla strategia di progressivo svuotamento del dividendo
- sollecita, quando l'attenzione della classe è adeguatamente matura, all'uso della strategia di progressivo svuotamento del dividendo, facendo verificare ai bambini che si tratta di una strategia che "funziona" in tutti i casi (mentre la strategia di avvicinamento progressivo al dividendo entra in crisi quando il divisore contiene molte cifre diverse da zero)
- introduce infine (siamo ormai arrivati alla fine della classe III) la tecnica della divisione "alla canadese" come tecnica ragionata di calcolo scritto, facendo rilevare ai bambini come la procedura di calcolo insegnata riprenda in forma organizzata (sistematica, ordinata) una strategia di calcolo da loro già ampiamente praticata dopo essere emersa spontaneamente nel lavoro in classe

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

(1) Boero,P.:"Sul problema dei problemi aritmetici nella scuola elementare",L'INS. DELLA MAT. E DELLE SC. INT.,vol.9(1986)n°2,49-93
(2) Boero,P.;Ferrero,E.:"La tecnica canadese vince", LA VITA SCOLASTICA, anno XVII (1988),n.8
(3) Boero,P.: "Acquisition of Meanings and Evolution of Strategies in Problem Solving from the Age of 7 to the Age of 11 in a Curricular Environment", PROCEEDINGS PME-XII,OOK Veszprem (1988),177-184
(4) Boero,P.,"L'insegnamento della matematica nel progetto"Bambini, maestri,realtà" '",L'INS.DELLA MAT.E DELLE SC.INT.,vol.XIII,1990
(5) Boero,P.;Ferrari,P.L.;Ferrero,E.:"Division Problems for Children Aged 8 to 10 in a Curricular Project:Meanings and Procedures in the Transition to a Written Algorithm", FOR THE LEARNING OF MATHEMATICS,1990
(6) Brousseau,G.:"The Crucial Role of the Didactical Contract...", T.M.E.OCCASIONAL PAPER 54, I.D.M. Bielefeld (1984), 110-120
(7) Ferrero,E.;Scali,E.:"Aspetti linguistici della risoluzione dei problemi", ATTI XI CONGRESSO U.M.I. SULLA DIDATTICA DELLA MATEMATICA,SUPPL. NOTIZIARIO U.M.I.,N.11(XIV) (1987), 108-119
(8) Ferrero,E.:"Le strategie risolutive: una...cento,mille ",LA VITA SCOLASTICA, anno XVIII (1989),n.11
(9) Laing,,R.A.;Meyer,R.A.:"Transitional Division Algorithms",ARITHMETIC TEACHER(1982), 10-12
(10) Lesh,R.:"Conceptual Analysis of Mathematical Ideas and Problem Solving Processes", PROCEEDINGS P.M.E. IX(1985), 235-264
(11) Teule-Sensacq, P.;Vinrich,G.:"Résolution de problèmes de division au cycle élementaire dans deux types de situation didactiques", ED. STUDIES IN MATH.,13 (1982), 177-2O3
(12) Treffers,A.:Integrated Column Arithmetic according to Progressive Schematisation", ED.STUDIES IN MATH.,18(1987) ,125-145
(13) Vergnaud,G.:"Interaction sujet-situation" ,COMPTES RENDUS 3-EME ECOLE D'ETE DE DID. DES MATH ., IREM Orleans(1984),23-43
(14) Weiland,L.:"Matching Instruction to Children Thinking about Division", ARITHMETIC TEACHER,33(1985), 34-35