LA DIDATTICA DEI PROBLEMI NELLA CLASSE II

Se i problemi della classe I sono importanti per introdurre correttamente il lavoro sui problemi, è nella classe II che la didattica dei problemi richiede il massimo di attenzione da parte dell'insegnante, in quanto il passaggio a problemi "complessi" (che richiedono più di una operazione), l'introduzione del significato di "contenenza" e l'approccio (a fine anno) al significato di "partizione" della divisione, l'uso via via più esteso dei linguaggi matematici (notazioni aritmetiche con i segni +, = e poi anche x e -; grafi) e la crescente autonomia richiesta costituiscono tappe importanti e impegnative per i bambini nella strutturazione del loro rapporto con i problemi. Considerando gli obiettivi di apprendimento della classe II in campo aritmetico e geometrico, si può inoltre dire che la maggior parte di tali obiettivi possono essere conseguiti all'interno delle attività di risoluzione dei problemi (restano esclusi gli allenamenti e taluni esercizi e approfondimenti - su rappresentazione dei numeri sull'abaco delle monete, addizione e sottrazione in colonna, memorizzazione della tabellina dell'addizione, calcolo a mente, rappresentazione piana di oggetti e situazioni spaziali). In definitiva, il 70% e oltre della matematica della classe II "si fa" risolvendo problemi.

Nel testo che segue si indicheranno, in forma estremamente sintetica, alcuni criteri di orientamento per la didattica dei problemi nella classe II.
Il testo avrà carattere riassuntivo rispetto a indicazioni più dettagliate riportate in altre parti di questo Rapporto Tecnico (alle quali via via il lettore interessato verrà indirizzato).
Al termine del testo generale, viene riportato un contributo di Ezio Scali riguardante i problemi di "resto monetario"; si tratta di un contributo recente (gennaio 1996) che riguarda un tipo particolare di problemi; tuttavia esso può servire di riferimento per capire la complessità delle questioni che riguardano la didattica dei problemi nella classe II e per individuare criteri di analisi delle prestazioni richieste ai bambini quando risolvono i loro primi problemi "impegnativi".

1. CONTESTUALIZZAZIONE DEI PROBLEMI

La didattica dei problemi risulta particolarmente efficace (sia per imparare ad affrontare i problemi che per costruire concetti e abilità matematiche necessarie nel lavoro sui problemi) quando i problemi proposti sono "contestualizzati" in una attività in cui gli alunni sono coinvolti e quando la risoluzione dei problemi proposti è funzionale (o almeno collegata in modo chiaro) alla prosecuzione dell'attività.
Ideali sono quindi i problemi relativi alle unità didattiche in corso di svolgimento (ad esempio, problemi relativi alla costruzione della "striscia della '**giornata**' " o della "linea del tempo" per la '**storia del bambino**'; problemi relativi a spese collegate alle '**produzioni**') e anche i problemi che sono collegati ad esigenze particolari della vita della classe (foderare i quadernoni; organizzare una festa; ecc.).
Come indicato nel piano di lavoro per la classe II a proposito del tema "aritmetica e problemi", può essere utile anche la proposizione di "problemi satelliti" di problemi ben contestualizzati e coinvolgenti per la classe (esempio tipico: per una 'produzione' si è scoperto che occorre spendere 8700 lire; *problema satellite*: "quanto ci dovrà dare di resto il negoziante se pagheremo con un biglietto da 10000 lire?").

Nella classe II è bene proporre problemi non contestualizzati in attività in corso SOLO in fase di verifica (in itinere e finale); esempi in questo senso sono riportati nelle verifiche quadrimestrali e finali e nelle schede di lavoro. Questi problemi (non contestualizzati in attività in corso) hanno una duplice funzione:
- abituare il bambino al "formato" standard dei problemi della scuola elementare;
- verificare (cosa rassicurante per l'insegnante e per i genitori!) che i bambini sanno anche affrontare con successo i problemi standard.

Tuttavia, i problemi non contestualizzati sono POCO EFFICACI PER COSTRUIRE CAPACITA' DI RISOLVERE PROBLEMI E PER COSTRUIRE CONCETTI E ABILITA' CHE INTERVENGONO COME "INGREDIENTI" NELLA RISOLUZIONE DEI PROBLEMI; e questa scarsa efficacia riguarda soprattutto i bambini di livello medio-basso e basso (cioè i bambini più a rischio di insuccesso in campo matematico!).

Le ragioni (teoriche e anche connesse alle verifiche da noi attuate) per le quali la contestualizzazione dei problemi è di vitale importanza per la produttività della didattica dei problemi sono indicate in altre parti di questo volume (e saranno oggetto di uno specifico approfondimento nel volume VI di questo Rapporto Tecnico); in particolare, si può leggere quanto scritto da Aurora Rondini *(cfr. pag. 193)*.

Da ora in poi ci riferiremo esclusivamente a problemi ben contestualizzati in attività in corso nella classe e funzionali allo sviluppo di tali attività.

2. TIPI DI PROBLEMI CHE E' UTILE PROPORRE IN II

A) problemi aritmetici di aspetto "tradizionale" (anche se ben contestualizzati in attività in corso): ad esempio, l'insegnante chiede:

"quanto dovremo spendere per comperare 3 kg di arance, che costano 2300 lire al kg, e 1 kg di zucchero, che costa 2600 lire"

(Cfr. anche Documentazione: "Acquisti con i soldi della cassa di classe"; "Acquisto dei vasi per la semina"; "Spesa complessiva della ciambella")

B) problemi aritmetici nei quali i bambini devono andare alla ricerca di dati mancanti:

"Quanto tempo è trascorso dall'ultima visita al campo?" (i bambini devono cercare quando è avvenuta l'ultima visita al campo, devono considerare la data odierna e, se c'è scavalcamento di uno o più mesi, preoccuparsi del numero dei giorni di ogni mese in gioco).

Trovati i dati, il problema può essere riformulato dall'insegnante (o meglio ancora dai bambini, sotto la guida dell'insegnante) come problema di tipo A.
(Cfr. anche Documentazione: "Quanti giorni mancano ....", pag. 35; "Confronto di lunghezze (piantina nel vaso e piantina nel campo)", pag. 39; "Quanto é durata la vacanza ....", pag. 40; "Fra quanti giorni ...", pag. 40).

C) problemi aritmetici nei quali mancano alcuni dati e la soluzione richiesta non è un "risultato" numerico, ma un procedimento risolutivo (in questo Rapporto Tecnico sono a volte chiamati "problemi aritmetici senza numeri") . Una tipica situazione problematica che dà luogo a questo tipo di problema è quella del preventivo di spesa in mancanza di alcuni dati necessari:

"Per fare la marmellata di arance ci occorrono 3 kg di arance e 1 kg di zucchero. Non sappiamo ancora i prezzi delle arance e dello zucchero. Quando li sapremo, come faremo a calcolare il costo degli ingredienti?"

Costruito il procedimento, il problema può essere trasformato dall'insegnante (o meglio ancora, dai bambini sotto la guida dell'insegnante) in un problema di tipo B o direttamente in un problema di tipo A.
(Cfr. anche Documentazione "La marmellata di arance");

D) "problemi aritmetici da costruire" (all'interno delle situazioni problematiche): si tratta di problemi nei quali occorre preliminarmente stabilire quali domande occorre porsi per venire a capo di una situazione problematica descritta in termini molto aperti (indicando un obiettivo generale e basta): ad esempio

"Abbiamo deciso di fare la marmellata di arance. Come possiamo fare per stabilire se i soldi rimasti nella cassa della classe ci bastano?". Le domande che i bambini devono porsi possono essere del tipo: "di quali ingredienti avremo bisogno?", "in quale quantità?", "dovremo anche comprare degli attrezzi?" ....

Successivamente il problema può essere trasformato dall'insegnante (meglio se con l'intervento attivo dei bambini) in problemi dei tipi precedenti.
(Cfr. anche Documentazione "La produzione del toast");

E) "problemi di progettazione matematica" che coinvolgono più ambiti disciplinari (in particolare, aritmetica, geometria, aspetti tecnologici...): un problema di questo tipo, particolarmente raccomandabile dopo un certo numero di esperienze di misura di lunghezze e di costruzione di segmenti all'interno della lunghezza del righello, è il seguente:

"Gli alunni della classe parallela dovevano disegnare, con i loro righelli lunghi 17 cm, la piantina di grano - campione della loro coltivazione, che quel giorno era alta 23 cm. Come avranno fatto?"

(Cfr. Documentazione).

Ognuno dei tipi di problemi elencati ha sue "virtù" (nel senso che consente di sviluppare specifiche capacità e di sollecitare specifici atteggiamenti che intervengono nella risoluzione dei problemi).
I problemi di tipo A), i più vicini ai problemi standard della scuola elementare, sono importanti perché contribuiscono a costruire i significati delle operazioni aritmetiche e perché avvicinano gli alunni al "formato" standard del "risolvere problemi".
I problemi di tipo B) stimolano a collegare i risultati-obiettivo del problema ai dati da utilizzare per ottenerli.
I problemi di tipo C) sono utili perché l'accento è posto sul processo risolutivo e sui significati delle operazioni (in particolare, può essere contrastata la tendenza a combinare affannosamente i dati numerici disponibili fino ad ottenere un risultato "ragionevole"); da notare che in questi problemi i bambini devono lavorare su "quantità generali" (in termini più precisi: su "variabili"). Si tratta di problemi molto formativi che tuttavia possono presentare alcune difficoltà (occorre quindi procedere con gradualità, partendo da situazioni problematiche semplici).
I problemi di tipo D) (introdotti nel nostro progetto negli ultimi anni) appaiono molto promettenti già nella classe II per quanto riguarda lo sviluppo di molte delle capacità che intervengono nella risoluzione dei problemi (progettualità, relazioni tra dati necessari e risultati da ottenere, segmentazione di un problema in parti...); essi tuttavia sono piuttosto impegnativi per la classe II, per cui è bene limitarsi a proporre situazioni problematiche piuttosto semplici, curando molto (all'inizio) la gestione a livello collettivo attraverso discussioni guidate dall'insegnante.
I problemi di tipo E) hanno notevole importanza per lo sviluppppo della progettualità (la capacità di impostare, orientare e controllare il processo risolutivo).

In base alle esperienze e alle ricerche finora condotte da noi, e con riferimento alla letteratura sul "problem solving", ci sembra di poter dire che uno sviluppo equilibrato delle capacità e degli atteggiamenti utili nel problem solving richiede che durante la classe II (e poi anche nel II ciclo) si alternino problemi dei diversi tipi. In pratica, partendo da problemi di tipo D, i più aperti e autenticamente "problematici", si possono via via proporre problemi dei tipi precedenti. A parte restano i problemi di tipo E), che hanno "virtù" particolari ai fini dello sviluppo della progettualità e della costruzione di concetti matematici importanti (come la "proprietà additiva della misura delle lunghezze" nell'esempio riportato in precedenza).

3. GESTIONE DEI PROBLEMI IN II ELEMENTARE

La gestione dei problemi in classe è il punto più delicato della didattica del problemi in II elementare.

Ogni tipo di problema descritto in precedenza pone specifici problemi di gestione, per i quali si rinvia alla documentazione indicata caso per caso.

Ci sono poi questioni generali riguardanti la gestione dei problemi in classe; su esse si rinvia il lettore a esempi e/o a specifici approfondimenti in altre parti di questo volume, limitandoci qui a un elenco sintetico di tali questioni:

* questioni inerenti la rappresentazione (della situazione problematica e del processo risolutivo): ad esse sono dedicati gli articoli di Anna Ferrara e Ezio Scali, e di Ezio Scali, alla fine di questo volume; anche il contributo che segue (di Ezio Scali) dedica un certo spazio alle questioni sulla rappresentazione nei problemi di resto.
In generale, si può dire che è bene stimolare i bambini a:
- utilizzare diversi tipi di rappresentazione in relazione alle diverse situazioni problematiche (anche proponendo rappresentazioni non spontaneamente prodotte in classe);
- confrontare rappresentazioni diverse prodotte in classe per uno stesso problema;
.... evitando però di obbligare i bambini a ricorrere a una rappresentazione che l'insegnante (o anche la maggior parte dei compagni) può giudicare migliore;

* questioni inerenti l'aiuto che l'insegnante può/deve dare all'alunno in difficoltà nella risoluzione di un problema. Si tratta di questioni che rinviano alla problematica più generale del ruolo dell'insegnante nei confronti dei bambini che manifestano difficoltà di apprendimento, ampiamente discussa nel volume VI di questo Rapporto Tecnico.
In sintesi, come risulta da diversi esempi riportati nella documentazione *(vedi in particolare a pag. 106 e 141)* possiamo dire che l'insegnante può e deve interagire individualmente con l'alunno in difficoltà aiutandolo a:
- penetrare la situazione problematica proposta, e rappresentarla in modo adeguato;
- assumere iniziative per muovere dalla situazione problematica verso l'obiettivo da raggiungere (intervenendo sulle "dinamiche mentali" dell'alunno: immaginazione di come può essere la soluzione; immaginazione di operazioni concrete che si potrebbero fare per ottenere il risultato cercato; ecc.);
- riflettere sui tentativi fatti, sui risultati parziali ottenuti, ecc. confrontandoli con l'obiettivo da raggiungere (intervenendo sull'esercizio delle funzioni di controllo);
- registrare adeguatamente (con opportune rappresentazioni esterne) le intenzioni, le scoperte fatte, ecc.
In base alle esperienze condotte negli ultimi anni l'interazione individuale scritta appare (nonostante alcuni difetti - in particolare, il rischio di frammentazione del ragionamento) la forma migliore di interazione con il bambino in difficoltà perché: consente di conservare (per l'insegnante e per il bambino) una traccia scritta dei suggerimenti e delle risposte, su cui ritornare in seguito; non perturba il lavoro degli altri bambini; è vissuta dal bambino come una forma di rapporto gratificante con il maestro. Naturalmente, durante la risoluzione di un singolo problema l'insegnante può interagire produttivamente con un numero assai ridotto di bambini -

3/4 al massimo, per interazioni di una certa complessità (e si tratta quindi volta per volta di scegliere con quali bambini interagire, con criteri di rotazione e di massima produttività: in un problema difficile può essere preferibile interagire con bambini di livello medio-basso piuttosto che con bambini di livello molto basso).

* questioni inerenti il lavoro da svolgere in classe dopo la risoluzione individuale dei problemi.
La "scaletta" già descritta nel piano di lavoro della classe II (l'insegnante sceglie alcune strategie risolutive rappresentative di quanto gli alunni hanno prodotto, i bambini sono invitati a individuare tra esse la strategia più vicina alla propria, quindi si procede ad eventuali commenti e discussioni collettive sui pregi e i difetti delle strategie scelte dal maestro per la discussione...) appare, in base alle nostre esperienze, utile per organizzare in modo produttivo il lavoro in classe. La sua messa in opera richiede tuttavia una certa maturità da parte dei bambini; in pratica, nella classe II si tratta di condurre gradualmente (e su esempi piuttosto chiari e semplici) i bambini a "entrare nel gioco" del confronto di strategie.
Il punto di partenza per entrare in tale "gioco" consiste nel cercare di capire una strategia diversa dalla propria (o simile alla propria, ma espressa in modo diverso). In questo senso può essere utile chiedere ai bambini di descrivere a parole un ragionamento espresso prevalentemente con dei calcoli, oppure (meglio ancora!) chiedere loro di risolvere un problema assai simile a quello originario seguendo il "metodo" indicato dal maestro.

Un approfondimento sui problemi di <u>RESTO MONETARIO</u>

*(Ezio Scali, Seminario Nazionale di Ricerca
in Didattica della Matematica, Pisa, Gennaio 1996)*

Il "resto monetario" è un significato isolato nel contesto dei significati della sottrazione: appartiene esclusivamente alle situazioni del campo di esperienza delle monete e degli acquisti. D'altra parte, i problemi di resto monetario hanno un consistente spazio, nel quadro del problem solving del nostro progetto, dalla fine della prima alla fine della seconda elementare / inizio della terza. Questa scelta richiede di essere spiegata. Le situazioni che comportano un resto monetario non risultano importanti tanto come lavoro su di un significato particolare della sottrazione, quanto come propedeuticità ad abilità necessarie per lo sviluppo della capacità di affrontare problemi. Esse, in particolare, si configurano come un significativo ambiente di sviluppo delle dinamiche temporali che intervengono nel problem solving complesso autonomo.

1. Le situazioni di resto monetario: aspetti sociali e cognitivi

1.1 La padronanza del meccanismo del resto monetario richiede un lungo e complesso itinerario didattico, all'interno del quale possono essere individuate difficoltà che fanno riferimento, da un lato, alla comprensione della dinamica sociale riguardante l'operazione di "resto" e, dall'altro, sono inerenti ai significati matematici della sottrazione. Questo fa sì che le situazioni di resto siano fra i nodi più complessi che i bambini affrontano nei primi due anni della scuola elementare all'interno del lavoro nel campo di esperienza delle monete e degli acquisti.
Frequentemente i bambini, quando hanno già acquisito una sufficiente confidenza con l'uso delle monete in situazioni di acquisto, trovandosi di fronte alla possibilità di acquistare un oggetto che costa, supponiamo, 300 lire disponendo di una moneta da 500 lire, affermano che l'oggetto non si può acquistare.
Se disponessero di 5 monete da cento, non avrebbero alcuna difficoltà (a metà della classe prima) ad indicare le monete necessarie al pagamento. In buona parte dei bambini il significato "valore" è già sufficientemente strutturato, però è anche strutturata la relazione "prezzo = quantità determinata di monete", non solo dal punto di vista matematico, inerente l'attività di

composizione-scomposizione del prezzo, ma anche come componente sociale dell'attività di acquisto, corrispondente all'idea di acquisto come "baratto" denaro/merce.

1.2 Da un punto di vista matematico la situazione di resto si può configurare come una trasformazione che opera su una misura per dare una misura. Tuttavia essa, più propriamente, può essere interpretata come confronto fra due misure (i soldi consegnati al negoziante e il prezzo della merce) da cui risulta una differenza *(cfr. Vergnaud, "Il bambino, la matematica, la realtà", 1994, pag. 147)*. La distinzione fra le due categorie fa riferimento alla maturità e al distacco che l'allievo può esercitare nei confronti della situazione problematica (nel primo caso, l'allievo è "dentro" la situazione e il prezzo trasforma in resto il valore "consegnato"; nel secondo caso, è la relazione "oggettiva" fra due grandezze di "valore" ad essere considerata).
Nelle situazioni di resto del campo di esperienza delle monete, la componente matematica può quindi essere connessa al "senso" che il bambino attribuisce alla particolare situazione.
Inizialmente, nel momento in cui il bambino afferma che con la moneta da 500 non può pagare 300 lire, egli sembra essere vincolato, in un'ottica di cognizione sociale, dall'assenza di modalità operative di comportamento: il bambino non dispone della possibilità di operare la "trasformazione" connessa al riconoscimento del resto (analogia con le macchine distributrici che accettano solo particolari tagli monetari e che non forniscono il resto), perché non ha coscienza della sua legittimità.
Il "senso", d'altra parte, è anche legato ad un problema di cognizione individuale: la coscienza del valore incorporato in una moneta può essere di ostacolo ad una visione dinamica della situazione implicante un resto. Infatti la consapevolezza che 500 = 100 + 100 + 100 + 100 + 100 può rafforzare la convinzione che tale valore è indivisibile e quindi non compatibile, in un'ottica di scambio merce/denaro, con l'acquisto di oggetti di valore inferiore.
I seguenti protocolli, tratti da una consegna data alla fine della classe prima ("Andrea e Simone pagano il toast con mille lire. Il toast costa 800 lire. Che cosa succede?"), confermano quanto appena detto:

Stefano: "***Che loro pagano diverso da noi con 1.000. Se lo pagano con mille lire <u>non va bene perché ci vuole le monete</u>".***
Ambra: "***Che loro pagano diverso da noi...<u>Però tu hai accettato le 1.000 lire...</u>***"

2. La complessità della gestione delle situazioni di resto monetario

2.1 Se le considerazioni precedenti relative al "senso" appartengono alla relazione del bambino con un problema non ancora direttamente esperito, è necessario approfondire maggiormente l'analisi di che cosa implica una situazione di resto monetario, nel momento in cui essa diviene oggetto di lavoro in classe.
Per padroneggiare una situazione problematica di questo tipo è necessario:
- valutare il rapporto denaro/prezzo (secondo la relazione >, se non è possibile o conveniente la relazione =)
- effettuare il pagamento con il denaro selezionato
- attendere il ritorno di denaro <u>e</u> oggetto
Il tempo del semplice scambio denaro/merce si scinde e l'equilibrio della situazione conosciuta si altera. Occorre coordinare una relazione di andata e ritorno che si dilata nel tempo, che coinvolge un altro soggetto, che comporta una "separazione" del denaro. La situazione diviene perciò complessa ed articolata e, in particolare, la separazione del denaro implica la considerazione della merce sotto forma di "denaro che vale".
Si può rilevare, quindi, che una situazione di resto richieda <u>una capacità non banale di coordinazione e di gestione della dinamica temporale</u>. Molte difficoltà si situano proprio a questo livello, perché è necessario raccordare temporalmente le azioni (e il loro significato)

effettuate da soggetti diversi. Non è raro che i bambini (e ciò succede anche fra gli adulti), in situazioni di acquisto reale, prendano il resto "dimenticando" l'oggetto!
Da un punto di vista didattico, alcune esperienze condotte sembrano rivelare l'importanza di assistere (dall'esterno) alla dinamica interpersonale che avviene in una situazione di resto, funzionale alla comprensione della propria dinamica interpersonale nel momento in cui si è (o ci si immagina) soggetti della situazione. In questo modo il bambino ha l'opportunità di prendere coscienza delle fasi che si succedono nello svolgimento della situazione e di iniziare a situarle temporalmente, riconoscendo loro un senso e gettando le premesse per un primo approccio al processo di contestualizzazione.
I due protocolli seguenti, relativi al mese di maggio della classe prima, possono chiarire questo punto:

Verbalizzazione scritta di Vera:
"La signora del negozio al maestro dice: i sottovasi costano 800 lire. Il maestro dà 1.000 lire alla signora del negozio la signora del negozio al maestro gli dà lo scontrino poi la signora del negozio al maestro gli dà 2 monete da 50 poi altre 2 monete da 50. La signora del negozio dà in tutto al maestro 200 lire"

Verbalizzazione scritta di Andrea:
"Il maestro alla signora gli ha dato una banconota da mille lire ma i sottovasi costavano uno 400 e l'altro 400. Siccome il maestro alla signora gli ha dato 1.000 la signora gli ha restituito 4 monete da 50 lire"

2.2 La necessità di <u>riequilibrare la situazione</u> fra prezzo e denaro consegnato richiede la consapevolezza che
`valore "consegnato" = valore dell'oggetto + valore del resto.`
Ciò corrisponde alla strategia detta di "completamento", che, generalmente, viene assunta dai bambini fin dai primi problemi.
Nell'estensione che assume il ricorso a questa strategia in una classe in cui l'insegnante non forza precocemente verso la sottrazione, si possono identificare più componenti. Da un lato, <u>la condivisione sociale in senso ampio</u>: nella pratica diffusa nel campo di esperienza extrascolastico il resto viene conteggiato in questo modo. Dall'altro, <u>la condivisione sociale nell'ambito della classe</u>, dove il linguaggio verbale che veicola il ricorso alla strategia di "completamento" diviene un linguaggio esteso e comune, che esprime e nello stesso tempo giustifica la strategia, trovando una diretta corrispondenza nella procedura sequenziale del conteggio del resto e nella temporalità della situazione. Infine, il fatto che questa strategia, rispondendo al bisogno di rimontare il disequilibrio, <u>permette al bambino di utilizzare ancora, nel calcolo, l'ambito delle monete</u> ("*Conto quanto manca per raggiungere...*", "*Vado dal prezzo ai soldi che ha dato aggiungendo le monete che mancano...*", "*Il resto è 200 lire, perché ho dato la moneta da 200 lire in più...*"). Nel conteggio per completamento, inizialmente, per molti bambini il riferimento alle monete da restituire è indotto dall'aderenza alla concretezza della situazione, dove il calcolo del resto è ancora difficilmente separabile dalle monete necessarie a comporlo perché <u>*esse*</u> vanno rese all'acquirente.

William, ad esempio (inizio classe seconda, nel problema di stabilire il resto che riceve una compagna pagando una spesa di 650 lire con mille lire) ragiona così:
"Ho detto 650, aggiungo 50 e faceva 700, aggiungo 100 lire e faceva 800 e raggiungo 100 lire e faceva 900 lire e raggiungo 100 lire e faceva 1.000. Ho aggiunto 350 lire. Vania ha ricevuto 350 lire di resto"

Più tardi il bambino effettuerà il conteggio completando via via gli ordini di valore, quando nel più generale sviluppo della coscienza relativa al valore, egli potrà distanziarsi dalle monete nelle operazioni di conta, assumendo il riferimento del "valore da restituire" e iniziando a considerare il numero come "oggetto" di lavoro mentale.

Un esempio di questo atteggiamento è costituito da Lorena (inizio della classe seconda, problema di stabilire il resto ottenuto pagando con 10.000 lire una spesa di 3.600 lire), che procede in questo modo:
"Ho aggiunto quattrocento lire a 3.600 in modo che facevano 4.000 e ho aggiunto 6.000 lire in modo che facevano 10.000 e ho visto che avevo aggiunto 6.400 lire"

2.3 Il "resto" appare come il risultato del confronto

valore "consegnato"- valore dell'oggetto =

solo dopo una operazione di distanziamento e di razionalizzazione della situazione, agevolata inizialmente da valori numerici che ne consentono il calcolo mentale. Il riconoscimento di questa procedura si consolida quando il bambino può identificare nel calcolo del resto la rispondenza con l'algoritmo della sottrazione e, nello stesso tempo, rafforza il significato di sottrazione come operazione inversa dell'addizione.
Nel passaggio a questa scelta di ragionamento si può cogliere non solo il progressivo distacco del bambino dal riferimento alle monete, ma anche l'acquisizione di una coscienza più matura per quanto riguarda la relazione fra il significato di "resto" e gli algoritmi di calcolo. Il resto rimarrà la quantità di denaro che va restituita a chi ha pagato con tagli monetari di valore superiore al prezzo, ma il bambino impara che la strategia di calcolo orale (e "dentro alla situazione") non è in contraddizione con l'algoritmo scritto della sottrazione, che diviene gradualmente una strategia economica quando i valori numerici interessano più cifre significative. Da questo punto di vista la complessità delle situazioni di resto favorisce la maturazione del rapporto fra le strategie di calcolo riguardanti la sottrazione, s generalmente la sottrazione non è "naturalmente" adottata nei primi problemi, ma la consapevolezza della sua rispondenza viene raggiunta dopo aver sperimentato lungamente quella per "completamento" e ciò contribuisce al fatto che il bambino non perde di vista il significato dei numeri.

3. Le situazioni di resto: il punto di vista dell'insegnante

3.1 I problemi che implicano l'operazione di sottrazione possono essere letti, da parte dell'insegnante, dentro a un quadro di riferimento articolato su due poli: quello dei significati e quello degli algoritmi.
Dal punto di vista dei significati, le situazioni problematiche inerenti la sottrazione riguardano un campo di significati vasto e di complessità diversa, e mettono in gioco il problema dell'estensione del significato primitivo di diminuzione a una varietà di situazioni che non rispondono a tale significato (*v. Vergnaud, 1981, 1985; Moser, 1985)*.
Dal punto di vista degli algoritmi, è possibile distinguere fra strategie prevalentemente orali (la strategia per completamento) e strategie prevalentemente scritte (la sottrazione). Entrambi gli algoritmi sono di portata generale e vengono praticati da ciascun soggetto (anche adulto) secondo la situazione e il tipo di calcolo da effettuare.

3.2 Le situazioni di resto sono situazioni in cui la dialettica fra le due modalità è esplicita, almeno per quanto riguarda il confronto fra la strategia praticata socialmente (e nel calcolo mentale) e quella acquisita nel corso dell'apprendimento scolastico. Dal punto di vista dell'insegnante è un compito difficile equilibrare la relazione fra le due strategie. Egli deve tener conto, da un lato, che il bambino non sempre mantiene le stesse modalità di ragionamento in tutte le situazioni che riguardano lo stesso significato di operazione, anche all'interno del medesimo ambito culturale ed esperienziale. Tendenzialmente, la strategia con cui il bambino affronterà problemi di resto varierà in relazione a fattori quali i valori numerici (in rapporto all'abilità nel calcolo mentale e alla capacità di passare da un ordine di grandezza ad un altro), la formulazione del problema, il senso personale che egli attribuisce a quella particolare situazione, la maturazione del processo di distanziamento e di gestione della situazione problematica.

D'altra parte l'insegnante deve anche essere consapevole che una particolare scelta di ragionamento, assume connotazioni parzialmente diverse in ambiti culturali diversi. Le operazioni mentali che l'alunno attua nella risoluzione di problemi riguardanti i diversi significati della sottrazione sono necessarie per mettere a fuoco le relazioni fra i dati e pertanto per il bambino sono connesse fortemente con il senso che ha la situazione e con l'ambito nel quale la strategia viene applicata.

Anche nell'ambito delle temperature o in quello delle misure di lunghezza, il ragionamento sulle "differenze" comporta generalmente un orientamento di pensiero basato sulla strategia di "completamento". In questi casi la rappresentazione della situazione problematica (colonnine dei termometri, misure delle altezze delle piantine) può rafforzare una focalizzazione del ragionamento sulla considerazione del "pezzo in più" (che risulta visibile) e sulla relativa conta dei gradi o dei cm della differenza. La possibilità di corrispondenza, in questi casi, fra un ambito figurale e un ambito concettuale sembra favorire una modalità operativa (espressa frequentemente in modo rituale: "*Tengo a mente… vado fino a…*") che diventa espressione diretta del senso che il bambino attribuisce alla situazione esaminata. Un problema per l'insegnante è che questi ambiti, pur molto importanti per consentire un rapporto del bambino con la rappresentazione e con la visualizzazione della propria procedura, possono favorire una forma di blocco nell'evoluzione delle strategie, in quanto l'alunno non è sollecitato a mutare il proprio atteggiamento. Nell'ambito delle temperature, ad esempio, è difficile per il bambino "pensare" una strategia di sottrazione in problemi di confronto, poiché non è chiara l'origine (la particolare scala graduata del termometro non ha inizio da zero): ciò sarà possibile solo dopo aver compreso che la sottrazione è l'operazione inversa dell'addizione, solo dopo, cioè, che il campo dell'esperienza dell'aritmetica sarà sufficientemente articolato da consentire una decontestualizzazione del numero.

3.3 L'insegnante, nel gestire il proprio ruolo di mediazione nel processo che avvia i bambini alla costruzione del campo di esperienza dell'aritmetica, non dovrà precocemente spostare la dialettica fra i due algoritmi verso la sottrazione. In particolare, nei problemi di resto ciò presenterebbe il rischio di bloccare il processo che il bambino va maturando a partire dalla gestione della complessità temporale della situazione.

Chiariamo questo aspetto esaminando due protocolli relativi alla stessa bambina.

Mariella, a metà della classe seconda e a poche settimane di distanza, risolve due problemi di resto con modalità diverse.

A - (31 gennaio: spesa di 30.000 lire, pagamento con una banconota da 50.000 lire)
"*Riceve di resto 20.000 lire perché per formare 50.000 ci servono 5 banconote da 10.000 e il maestro dà 50.000, è un po' come se volesse togliere 30.000 e allora resta 20.000*"

B - (20 febbraio: spesa di 5.600 lire, pagamento con una banconota da 10.000 lire)
"*Lui paga 10.000 e allora dobbiamo sapere quanto riceve di resto e da 5.600 vado avanti e arrivo a 10.000*"

Il protocollo A è interessante perché mostra una fase della complessa transizione alla dialettica fra la strategia per completamento e l'algoritmo della sottrazione. Nello stesso tempo pone all'insegnante problemi di gestione, da considerare nel quadro di apprendimenti a lungo termine.

Nel primo protocollo si può ipotizzare che l'entità dei valori numerici determini la possibilità di rielaborarli nel proprio campo visivo interno e di individuare le relazioni fra di essi: 50.000 e

30.000 possono essere gestiti diversamente da 10.000 e 5.600, poiché comportano la considerazione di una sola cifra significativa e possono essere assimilati a 5 e a 3. Mariella, reinvestendo la coscienza delle relazioni fra i numeri maturata nell'attività di composizione-scomposizione additiva dei prezzi (inclusa la consapevolezza della relazione delle parti con il tutto), giunge a ipotizzare la procedura della sottrazione, liberandosi del riferimento alle monete e assumendo i dati del problema come numeri, seppure attraverso la mediazione del significato della loro "composizione". Nel corso del processo risolutivo, Mariella comincia a prendere coscienza che il calcolo del resto può essere effettuato anche secondo la semantica del "togliere". E' interessante notare la forma che essa assume nell'atto linguistico della bambina: "...è un po' come se volesse togliere...", che evidenzia assai bene sia (in un'ottica di cognizione individuale) la nuova pista di ragionamento individuata, sia (in un'ottica di cognizione sociale) il fatto che il resto è legato alla scelta del taglio monetario con cui si effettua il pagamento, per cui è implicito che, non avendo tre banconote da 10.000, è *come se* il maestro le volesse "togliere" dalla banconota utilizzata.
Poche settimane dopo, tuttavia, Mariella dichiara un ragionamento per "completamento". Il secondo protocollo attesta che il processo che condurrà al riconoscimento della sottrazione come l'operazione rispondente, dal punto di vista dell'algoritmo, alla situazione di resto è un processo ancora in fase di sviluppo e non diviene perciò un atteggiamento esteso a tutte le situazioni di resto. Ciò, d'altra parte, sarebbe impossibile, poiché il conteggio per completamento è una procedura "naturale" in tali situazioni e lo diventa anche nel calcolo scritto, quando il problema si presenta più arduo nella gestione dei valori numerici.

3.4 L'insegnante deve perciò valutare le situazioni esaminate precedentemente sulla base della costruzione di apprendimenti a lungo termine. Ciò implica, come abbiamo già detto, di non forzare precocemente il processo verso la sottrazione. In termini generali, la possibilità per il bambino di sperimentare la strategia di completamento in diversi ambiti significativi risulta essere feconda per più motivi. In primo luogo, perché è un algoritmo che consente al bambino di non perdere di vista il significato dei dati del problema, poiché permette di mantenere il contatto con la temporalità della situazione (se necessario, con la variante del "completamento a ritroso"). In secondo luogo, perché permette di dare spessore all'entità numerica da contare: è il resto che viene conteggiato, esso non risulta "magicamente" da un conto (sul modello dei registratori di cassa che forniscono il resto dopo che l'operatrice ha effettuato il totale e impostato il denaro consegnato dal cliente); ciò avviene anche in molti altri ambiti: "***La temperatura esterna era di 7°, invece la temperatura interna era di 20°. Io ho contato tutte le lineette fino a 20° e in tutto fa 13° di differenza***" ;"***La piantina al buio è più alta di 5 cm: mi sono tenuto in mente 19 cm, che è l'altezza della piantina alla luce e ho aggiunto 5 cm e sono arrivato a 24 cm, che è l'altezza della piantina al buio***" . Infine, la procedura per completamento risulta essere quella più "naturale" per molte situazioni della vita quotidiana e, nella valorizzazione che avverte da parte dell'insegnante, il bambino può riconoscere un segnale del riconoscimento del suo sforzo cognitivo nel corso del problem solving.

3.5 L'insegnante deve gradualmente favorire, tuttavia, la decontestualizzazione di una strategia dai suoi referenti diretti, valorizzando l'uso del linguaggio verbale che agevola, attraverso atti di denominazione pertinenti, il riconoscimento del processo, per ritrovare successivamente analogie di comportamento con altre esperienze. Ma nello stesso tempo l'insegnante deve curare di integrare una determinata strategia con altri approcci allo stesso referente (con altri "sensi"), poiché i diversi punti di vista che il bambino sperimenta nel corso del lavoro all'interno di differenti ambiti culturali possono agire sinergicamente nella crescita delle sue competenze.
Dall'osservazione di tecniche di calcolo per sottrazione applicate in contesti diversi può emergere l'algoritmo come entità aritmetica adatta a tutte le situazioni. La comprensione che l'algoritmo della sottrazione rappresenta la procedura unificante per un gran numero di situazioni diverse, richiede che l'insegnante prenda in considerazione la dimensione sociale della costruzione delle conoscenze. Mediante le attività di confronto potrà far riflettere gli

allievi sulla generalità di questa procedura, avviando il riconoscimento della sottrazione come concetto che "comprende" anche la modalità del completamento.

3.6 L'insegnante, nel nostro progetto, induce il passaggio indicato nel paragrafo precedente gestendo la dialettica, assai delicata, fra il problem solving individuale e le attività di confronto, che prevedono momenti di lavoro individuale e momenti di lavoro collettivo.
Nella fase di risoluzione individuale del problema il bambino sviluppa un primo livello di consapevolezza, attraverso la verbalizzazione (scritta) del ragionamento. Il linguaggio verbale può rendere conto della strategia seguita, ma può essere talvolta lo strumento del pensiero necessario a guidarla o addirittura a produrla. Questa primo livello di consapevolezza non appare però sufficiente per la maturazione delle competenze, essendo interno al processo attuato.
L'insegnante propone, successivamente, la riflessione sull'azione compiuta, mediante la pratica didattica del confronto delle strategie attuate.
Attraverso la modalità, generalmente seguita in classe, di proporre due diversi modi di affrontare un aspetto della risoluzione del problema, viene richiesto al bambino di riconoscere a quale delle due assomiglia la procedura che egli ha seguito nella risoluzione individuale. Il riconoscimento della somiglianza o della differenza fra la propria modalità e quella dei compagni rappresenta una condizione importante per la sensibilizzazione verso un secondo livello di consapevolezza. Il bambino è forzato a vedere la situazione problematica che ha risolto in precedenza da un altro punto di vista, a mettersi cioè su un altro piano di generalità. Egli è sollecitato a comprendere come hanno ragionato i compagni attraverso un'attribuzione di significato delle tracce linguistiche che essi hanno prodotto, e quindi, dopo aver compiuto le stesse operazioni di distanziamento verso il proprio ragionamento, collocarlo prendendo in considerazione la somiglianza delle operazioni mentali compiute.
Questa attività presenta livelli differenziati di difficoltà. Non sempre è accessibile a tutti i bambini autonomamente e ciò richiede che l'insegnante interagisca individualmente con l'alunno in difficoltà. Nelle attività di apprendimento un obiettivo è rappresentato dal superamento del "senso" di un'operazione verso il "significato": esso è un fatto necessario e imprescindibile nel processo di costruzione del campo di esperienza dell'aritmetica, ma può rappresentare un problema per l'insegnante quando in classe ci sono bambini che sono già pervenuti alla decontestualizzazione del numero e alla "contrazione" dei processi in "operazioni", mentre altri bambini rischiano di apprendere, dai compagni o dalla istituzionalizzazione in classe, la formalizzazione dell'operazione senza aver maturato adeguatamente il processo. Questo costituisce una forte motivazione alle attività di confronto (per l'importanza che ha lo sviluppo delle operazioni mentali descritte per la comprensione e la concettualizzazione e per la ricaduta sulla produzione individuale); nello stesso tempo richiede l'attenzione dell'insegnante verso un elemento di rischio: il bambino può cogliere una somiglianza di superficie fra la propria strategia e quella di un compagno, sulla base dei segni o dei termini utilizzati, senza cogliere il processo sottostante (un esempio tipico è il bambino che afferma la somiglianza fra "tolgo monete dai soldi consegnati al negoziante fino al prezzo che dovevo pagare" e "dai soldi dati al cassiere tolgo il prezzo che dovevo pagare" perché tutti e due "tolgono").
Mediante la discussione sulle strategie confrontate, l'insegnante favorisce un ulteriore livello di consapevolezza, relativo alla comprensione dell'intero processo. L'insegnante rende possibile cioè una mediazione fra gli atti di pensiero dei singoli bambini attraverso la valorizzazione delle espressioni linguistiche che consentono di dar un nome ai processi esaminati. A questo riguardo, un problema, che appare sempre più rilevante nella nostra ricerca, è quello relativo alla capacità del bambino di denominare gli elementi costituenti il processo attuato o osservato e i concetti progressivamente padroneggiati. Nel caso specifico del resto, passare dalla denominazione "Mariella ha tolto 30.000 da 50.000" alla denominazione "Mariella ha tolto il prezzo dei libri dai soldi che il maestro aveva dato al cartolaio" significa porsi su un altro piano di generalità. Significa cioè accedere a un significato riconoscibile e trasferibile, che apre al bambino la possibilità di pervenire a dei livelli più maturi e più complessi di pensiero.

Esempi di gestione dei problemi di resto monetario si possono trovare nella Documentazione:
- (resto assicurazione)
- (confronto di strategie per calcolare il resto)
- (il confronto di strategie per giungere a calcolare il resto per differenza)